大学数学のアトリエ｜線形代数　第 6 章　固有値・固有ベクトル

No.2　固有方程式

この回のゴール

- 固有多項式・固有方程式を定義し，固有値を求められる．
- 固有値・固有空間を求める手順を実行できる．
- 代数的重複度と幾何的重複度を区別し，その大小関係を説明できる．
- 固有多項式が基底（相似）によらないこと，トレース・行列式と固有値の関係，ケイリー・ハミルトンの定理を使える．

■ 1. 固有方程式

No.1 定理 1 より，λ が A の固有値 $\iff$ $A-\lambda E$ が正則でない $\iff$ $\det(A-\lambda E)=0$（第 3 章 No.2 定理 3）．これで固有値を**方程式を解いて**求められるようになる．

定義 1　固有多項式・固有方程式

n 次正方行列 A に対して，λ の多項式

$$\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)$$

を A の**固有多項式**（特性多項式）といい，方程式 $\varphi_A(\lambda)=0$ を**固有方程式**（特性方程式）という．

定理 1

λ が A の固有値 $\iff$ $\varphi_A(\lambda)=0$.

【証明】 $\det(\lambda E-A)=(-1)^n\det(A-\lambda E)$（第 3 章 No.2 練習問題 3）なので，$\varphi_A(\lambda)=0 \iff \det(A-\lambda E)=0$. □

注意

- $\det(A-\lambda E)$ を固有多項式と呼ぶ本もある．符号が $(-1)^n$ 倍違うだけで，根（固有値）は同じ．$\det(\lambda E-A)$ にすると，最高次の係数が 1 になる（$\lambda^n+\cdots$）．
- $\varphi_A(\lambda)$ は λ の n 次式なので，固有値は（重複を含めて）高々 n 個．

■2 次正方行列の場合　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ なら

$$\varphi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\lambda+\det A.$$

■ 2. 固有値・固有空間の求め方

手順

1. 固有方程式 $\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$ を解いて，固有値 λ を求める．
2. 各固有値 λ について，同次方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解き，固有空間 $W(\lambda)$ の基底を求める．

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有空間を求めよ．

【解答】 $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2)$ より，固有値は 5, 2.

$\lambda = 5 : A - 5E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ より $-x_1 + x_2 = 0$. $W(5) = \langle {}^t(1, 1)\rangle$.

$\lambda = 2 : A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ より $2x_1 + x_2 = 0$. $W(2) = \langle {}^t(1, -2)\rangle$.

注意

固有値 λ を正しく求めていれば，$A - \lambda E$ は必ず正則でない（ランクが n より小さい）．簡約して零行が出なかったら，固有値の計算を間違えている．

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有空間を求めよ．

【解答】 第 3 章 No.2 例題 2 と同じ工夫で，第 1 行に第 2・3 行を加えてから $\lambda - 4$ をくくり出す．

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}.$$

（2 つめの等号は ② + ①，③ + ①.）よって $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$，固有値は 4, 1（1 は 2 重根）．

固有空間は No.1 例題 1・例題 2 で求めたとおり

$$W(4) = \langle {}^t(1, 1, 1)\rangle, \qquad W(1) = \langle {}^t(-1, 1, 0),\ {}^t(-1, 0, 1)\rangle.$$

例 1　三角行列

上三角行列（下三角行列）A の固有値は，対角成分である．$\lambda E - A$ も三角行列なので，$\varphi_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$（第 3 章 No.1 定理 2）．

例 2　実数の固有値がない場合

90° 回転 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\lambda^2 + 1$ で，実数の根をもたない（No.1 例 1 (c)）．複素数まで考えれば固有値は $\pm i$ である．固有値を複素数の範囲で考える立場もあり，第 7 章 No.5 で少し使う．

■ 3. 重複度

定義 2　重複度

固有値 λ_0 について，

- 固有多項式 $\varphi_A(\lambda)$ が $(\lambda-\lambda_0)^m$ で割り切れる最大の m を，λ_0 の**代数的重複度**という．
- 固有空間の次元 $\dim W(\lambda_0)$ を，λ_0 の**幾何的重複度**という．

例 3

(a) 例題 2 の固有値 1：代数的重複度 2，幾何的重複度 2.

(b) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ の固有値 3：$\varphi_A=(\lambda-3)^2$ で代数的重複度 2．しかし $W(3)=\langle \boldsymbol{e}_1\rangle$（No.1 練習問題 3）で，幾何的重複度は 1.

定理 2

各固有値 λ_0 について，$1\le$ (幾何的重複度) $\le$ (代数的重複度).

【証明】固有値なので $W(\lambda_0)\neq\{\boldsymbol{0}\}$ で，左の不等式が成り立つ．$k=\dim W(\lambda_0)$ とし，$W(\lambda_0)$ の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ を $\mathbb{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ に延長する．$P=(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)$ とおくと，$A\boldsymbol{v}_i=\lambda_0\boldsymbol{v}_i$（$i\le k$）より，$P^{-1}AP$ の第 1〜k 列は $\lambda_0\boldsymbol{e}_1,\dots,\lambda_0\boldsymbol{e}_k$ である（第 5 章 No.5 定理 3．$P^{-1}AP$ は基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ に関する f_A の表現行列）．つまり

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_0E_k & C\\ O & D\end{pmatrix}$$

の形になる．次の定理 3 より $\varphi_A=\varphi_{P^{-1}AP}$ で，これを第 1 列から順に k 回余因子展開すると $(\lambda-\lambda_0)^k\det(\lambda E-D)$．よって φ_A は $(\lambda-\lambda_0)^k$ で割り切れる．□

No.3 で見るように，幾何的重複度が代数的重複度より小さい固有値があると，**対角化できない**.

■ 4. 固有多項式の性質

定理 3　相似な行列の固有多項式

$B=P^{-1}AP$ ならば $\varphi_B(\lambda)=\varphi_A(\lambda)$．したがって相似な行列は同じ固有値をもつ.

【証明】$\lambda E-P^{-1}AP=P^{-1}(\lambda E-A)P$ なので，第 3 章 No.2 定理 4 より $\det(\lambda E-B)=\det P^{-1}\det(\lambda E-A)\det P=\det(\lambda E-A)$.□

定理 3 より，線形変換 $f\colon V\to V$ の固有多項式を「どれか 1 つの基底に関する表現行列の固有多項式」として，基底によらずに定めることができる（第 5 章 No.5 定理 4 の「行列式・トレース」と同じ考え方）.

定理 4　トレース・行列式と固有値

n 次正方行列 A の固有多項式は

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n - (\operatorname{tr} A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

の形をしている．特に，$\varphi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ と 1 次式の積に分解できるとき（λ_i は重複を含む固有値），

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \qquad \det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

【証明】定数項：$\varphi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$（第 3 章 No.2 練習問題 3）．$\lambda^{n-1}$ の係数：行列式の定義の各項のうち λ^{n-1} 以上の次数をもつのは対角成分の積 $(\lambda - a_{11})\cdots(\lambda - a_{nn})$ だけで（他の項は対角成分を 2 つ以上含まない），その λ^{n-1} の係数は $-(a_{11} + \cdots + a_{nn})$．後半は $(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ を展開した係数と比べる（解と係数の関係）． □

検算に使える

例題 2 では，固有値 4, 1, 1 の和 6 が $\operatorname{tr} A = 2 + 2 + 2$ に，積 4 が $\det A$ に一致する．固有値を求めたら，和がトレースに等しいかを確かめるとよい．

■ 5. ケイリー・ハミルトンの定理

定理 5　ケイリー・ハミルトンの定理

n 次正方行列 A の固有多項式を $\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ とすると，

$$\varphi_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E = O.$$

【証明】（2 次の場合） $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ を示せばよい．$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$，$(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$ なので，$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = -(ad - bc)E$． □

一般の場合の証明は，余因子行列の公式 $(\lambda E - A)\widetilde{(\lambda E - A)} = \varphi_A(\lambda)E$（第 3 章 No.3 定理 2）を λ の多項式として比べる方法などがある．ここでは省略する．

注意

「$\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ に $\lambda = A$ を代入すると $\det(AE - A) = \det O = 0$」という議論は**誤り**である．左辺は行列，右辺は数で，そもそも比べられない．定理は「多項式を作ってから A を代入する」と行列 O になる，という主張である．

例題 3

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について，ケイリー・ハミルトンの定理を用いて A^{-1} を求めよ．

【解答】 例題 1 より $A^2-7A+10E=O$. $A(7E-A)=10E$ と変形すると，$A\cdot\frac{1}{10}(7E-A)=E$ なので

$$A^{-1}=\frac{1}{10}(7E-A)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

■ 練習問題

1. 次の行列の固有値と固有空間を求めよ．また，各固有値の代数的重複度と幾何的重複度を答えよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\qquad (3)\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

2. A と ${}^tA$ の固有多項式は等しいことを示せ．

3. 第 3 章 No.3 練習問題 5 の行列 $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -r & -q & -p\end{pmatrix}$ の固有多項式を答えよ．これを使って，固有値が 1, 2, 3 となる 3 次正方行列を 1 つ作れ．

4. 練習問題 1 (3) の行列について，固有値の和と積がそれぞれトレースと行列式に等しいことを確かめよ．

5. $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ について，ケイリー・ハミルトンの定理を用いて A^3 を $pA+qE$ の形で表し，A^3 を求めよ．

6.（考えてみよう）回転行列 $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$（$0\le\theta<2\pi$）が実数の固有値をもつのはどんなときか．図形的な意味とともに答えよ．

■ 練習問題の解答

1. (1) $\varphi=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$. $W(3)=\langle{}^t(1,\,1)\rangle$, $W(-1)=\langle{}^t(1,\,-1)\rangle$. どちらも代数的・幾何的重複度は 1.

(2) $\varphi=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2$. $A-3E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ より $W(3)=\langle{}^t(1,\,1)\rangle$. 代数的重複度 2，幾何的重複度 1.

(3) 第 1 行で展開すると

$$\varphi=\lambda\{(\lambda-2)(\lambda-4)-1\}+\{(\lambda-4)+3\}-\{-1-3(\lambda-2)\}=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

$W(1)=\langle{}^t(1,\,0,\,1)\rangle$, $W(2)=\langle{}^t(1,\,1,\,1)\rangle$, $W(3)=\langle{}^t(1,\,1,\,2)\rangle$. どれも重複度 1.

2. $\det(\lambda E-{}^tA)=\det{}^t(\lambda E-A)=\det(\lambda E-A)$（第 3 章 No.2 定理 2）.

3. 第 3 章 No.3 練習問題 5 より $\varphi_C(\lambda)=\lambda^3+p\lambda^2+q\lambda+r$. $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$ なので $p=-6$, $q=11$, $r=-6$ として $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\end{pmatrix}$.

4. 固有値の和 $1+2+3=6$，$\mathrm{tr}=0+2+4=6$．積 $1\cdot 2\cdot 3=6$，$\det=6$（サラスの方法で $0-3-1+6-0+4=6$）．

5. $A^2=7A-10E$ なので $A^3=7A^2-10A=7(7A-10E)-10A=39A-70E$．よって $A^3=\begin{pmatrix}156-70 & 39\\ 78 & 117-70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}86 & 39\\ 78 & 47\end{pmatrix}$．

6. $\varphi=\lambda^2-2\cos\theta\,\lambda+1$．判別式 $/4$ は $\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$ で，実数解をもつ $\iff \sin\theta=0 \iff \theta=0,\pi$．$\theta=0$（何もしない，固有値 1）と $\theta=\pi$（180° 回転，固有値 -1）のときだけ，向きが変わらない（逆向きになる）方向がある．